Краткие сообщения ОИЯИ № 1[47]-91 *JINR Rapid Communications No.1[47]-91*
УДК 621.384.601: 539.1

ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ РЕЗОНАНСНОГО ДОПЛЕРОВСКОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКОВ С Е-ВОЛНАМИ. О ЗНАКЕ ЭНЕРГИИ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В ЭЛЕКТРОННЫХ ПУЧКАХ

А.Г.Бонч-Осмоловский, К.А.Решетникова

Изучается обмен энергией между пролетными электронами сильноточного релятивистского электронного пучка и продольными электромагнитными волнами. Обнаружен эффект изменения знака энергии пучка с волной при росте амплитуды волны в процессе резонансного доплеровского взаимодействия (РДВ) пучка с попутными волнами (медленной и быстрой). Медленная волна с большой амплитудой может стать волной с положительной энергией, быстрая – с отрицательной энергией. Во встречной продольной волне, фазовая скорость которой направлена навстречу скорости электронов пучка, нелинейные процессы усиливают торможение пучка, энергия пучка с волной всегда положительна. При этом для сильноточного пучка (J ~ 10 кА) передаваемая полю мощность (мощность торможения пучка) может достигать 10^9 Вт и более.

Работа выполнена в Лаборатории высоких энергий ОИЯИ.

Energy Aspects of the Resonance Doppler Interaction of Relativistic Electron Beams with E-Waves. On the Energy Sign of Longitudinal Electromagnetic Waves in Electron Beams

A.G.Bonch-Osmolovsky, K.A.Reshetnikova

Energy exchange between flight electrons of high current relativistic electron beam and longitudinal electromagnetic waves is studied. At the increase of the wave amplitude in the process of resonance Doppler interaction (RDI) of the beam with parallel waves, slow and fast, an effect of the change of the energy sign of the beam with the wave is observed. The slow wave with a high amplitude may become a wave with positive energy; the fast one, with negative energy. In the counter parallel wave, the phase velocity of which is oriented towards the electron velocity, nonlinear processes intensify beam deceleration, and the energy of the beam with the wave is always positive. For the high current beam (J ~ 10 kA) the power transmitted from the beam to the field (the power of the beam deceleration) can attain 10^9 W and higher.

The investigation has been performed at the Laboratory of High Energies, JINR.

1. Введение

Взаимодействие сильноточного релятивистского электронного пучка (РЭП) с Е-волной [1-6] приводит к росту электрического поля продольной электромагнитной волны (на линейной стадии пропорционально времени или расстоянию взаимодействия [4]) и, следовательно, росту модуляции плотности РЭП. По мере нарастания этих величин возникают нелинейные явления, которые в конечном счете ограничивают процесс роста поля волны, названного нами резонансным доплеровским взаимодействием (РДВ) пучка и волны [4-6].

Принципиальный интерес при этом представляет характер обмена энергией пролетных электронов с Е-волной (скорость электронов и фазовая скорость волны не равны друг другу), изменение энергии направленного движения электронов пучка, а также баланс энергии РДВ с учетом работы внешнего источника электромагнитного поля.

Рассмотрению этих вопросов с учетом нелинейности процесса РДВ, т.е. при достаточно больших полях, посвящена настоящая работа.

2. Основные соотношения теории резонансного доплеровского взаимодействия

В основу рассмотрения положим гидродинамическую модель описания пучка и РДВ [4-6].

Изучается взаимодействие однородного, моноэнергетического и замагниченнного электронного пучка с начальными плотностью n_0 и скоростью v_0 в положительном направлении оси z, релятивистским фактором $\gamma_0 = (1 - v_0^2/c^2)^{-1/2}$ с продольной квазимонохроматической волной (Е-волной) вида

$$E_z = |E(r)| \exp(-i\omega t + ikz) . \qquad (1)$$

Амплитуда Е-волны $|E|$ может слабо зависеть от времени, т.е. по крайней мере так, что на периоде волны $2\pi/\omega$ она меняется мало.

В дальнейшем будем рассматривать РДВ на стадии, когда фазовую скорость волны (1) $v = \omega/k$ можно также считать лишь медленно меняющейся функцией времени (или расстояния) по некоторому заранее заданному закону.

Направление фазовой скорости волны в общем случае считаем произвольным, т.е. может быть $v = v_z > 0$, $k > 0$ — попутная волна, распространяющаяся по направлению движения электронов пучка и $v = v_z < 0$, $k < 0$ — встречная волна, распространяющаяся против движения пучка.

Введем единую переменную — фазу или эйконал

$$\psi = -\omega t + kz \tag{2}$$

и потенциальную функцию поля $\phi(r, \psi)$, связанную со скалярным Φ и векторным $A = A_z$ потенциалами соотношением

$$\phi = \frac{e\gamma}{mc^2}(\Phi - \beta A) . \tag{3}$$

Здесь $\beta = v/c$, $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$, e, m — заряд и масса покоя электрона.

Продольное электрическое поле волны и функция $\phi(r, \psi)$ связаны так:

$$E_z = -\frac{mc^2 k}{e\gamma}\frac{\partial\phi}{\partial\psi} . \tag{4}$$

Теперь поставим основное условие, которое характеризует рассматриваемую стадию РДВ: это стадия слабой нелинейности, когда в результате установления квазистационарного нелинейного режима /8/ (см. далее) максимальное значение поля волны $\phi_{макс}$ мало по сравнению с потенциалом захвата $\phi_в$ электронов полем волны, например,

$$\phi_{макс} \lesssim 0{,}5\,\phi_в = 0{,}5(\gamma_0' - 1) . \tag{5}$$

γ_0' — релятивистский фактор электронов в системе покоя волны в начале процесса. Смысл этого важного для дальнейшего условия двоякий:

во-первых, физический: соответствующий выбор параметров пучка, волны и волновода (например, начального значения поля волны) позволяет при выполнении (5) "держать" процесс резонансного доплеровского взаимодействия на гидродинамической, слабонелинейной стадии, при которой малы изменения фазовой скорости волны, энергии электронов, слаба генерация дополнительных гармоник поля, процесс РДВ развивается быстро, близко к линейной стадии;

во-вторых, математический: условие (5) позволяет применять в анализе ряда эффектов метод слабой нелинейности, например, асимптотический метод Крылова — Боголюбова.

В связи с соотношением (4) из уравнений движения электронов в гидродинамическом приближении следует интеграл движения:

$$\gamma'_e + \phi = \mathrm{Const} = \gamma'_0. \tag{6}$$

Здесь γ'_0 — значение релятивистского фактора электронов в области, где $\phi \simeq 0$.

γ'_e — текущее значение релятивистского фактора электронов. Обе величины взяты в системе отсчета, движущейся с фазовой скоростью волны (система покоя волны, СПВ):

$$\gamma'_0 = \gamma\gamma_0(1 - \vec{\beta}\vec{\beta}_0), \quad \gamma'_e = \gamma\gamma_e(1 - \vec{\beta}\vec{\beta}_e). \tag{7}$$

Теперь ясно, что потенциал захвата ϕ_s (когда $\gamma'_e = 1$) равен $\phi_s = \gamma'_0 - 1$.

Опуская промежуточные выкладки, выпишем основное нелинейное уравнение для эволюции функции $\phi(r, \psi)$, которое следует из уравнений Даламбера для потенциалов $\Phi(r, \psi)$ и $A(r, \psi)$:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\psi^2} + \frac{1}{\kappa^2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) = q - q\beta'_0\frac{\gamma'_0 - \phi}{\sqrt{(\gamma'_0 - \phi)^2 - 1}} + \phi_{вн},$$

$$\kappa^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\omega^2}{c^2}, \quad q = \frac{\omega_л^2}{\omega^2}\beta^2\gamma^2\gamma'_0, \quad \phi_{вн} = \frac{4\pi e\gamma^3\beta^3}{mc\omega^2}j_{вн}, \quad \omega_л^2 = \frac{4\pi e^2 n_0}{m\gamma_0}; \tag{8}$$

$j_{вн}$ — плотность тока источника, создающего начальную Е-волну.

В линейном приближении

$$\phi \ll \gamma'_0 - 1 \tag{9}$$

справедлива линейная теория взаимодействия пучка и Е-волны /4/, когда существует резонанс

$$\gamma_0^2(\omega - kv_0)^2 = \frac{\omega_л^2}{S^2}, \tag{10}$$

где фактор "редукции" ленгмюровской частоты

$$S^2 = 1 \pm k_\perp^2/\kappa^2, \tag{11}$$

$k_\perp$ — радиальное волновое число, величины $k_\perp$ и S должны определяться из конкретной граничной задачи для данного типа замедляющей волну структуры. Предполагается при этом, что в аксиально-симметричной задаче поле меняется по радиусу $\sim J_0(k_\perp r)$ или $\sim I_0(k_\perp r)$.

Эквивалентная форма резонансного условия (10) :

$$\epsilon(k, \omega) = 1 - \frac{\omega_{\Pi}^2}{\gamma_0^2(\omega - k v_0)^2 S^2} = 0; \tag{10^1}$$

это — обычное условие существования продольных волн в структуре с пучком, $\epsilon(k, \omega)$ — диэлектрическая проницаемость пучка с окружением.

Как показано в [4], при резонансе (10) поле в структуре с пучком растет линейно со временем или расстоянием взаимодействия с "инкрементом"

$$\Gamma = \frac{1}{|E_н|}\,\frac{\partial |E|}{\partial z} = \frac{kS^2}{2}, \tag{12}$$

$E_н$ — поле начальной волны.

Важное замечание: поле всегда растет в направлении распространения волны, т.е., например, в случае встречной волны рост поля происходит навстречу движения электронов пучка.

Перейдем к рассмотрению вопросов энергетики резонансного доплеровского взаимодействия.

3. Изменение кинетической энергии электронов пучка

Вначале рассмотрим изменение релятивистского фактора γ_e (кинетической энергии) одиночного электрона пучка. Обратное преобразование энергии-импульса дает для лабораторной системы отсчета:

$$\gamma_e = \gamma\gamma_e'(1 + \beta\beta_e') . \tag{13}$$

Составим разность

$$\gamma_e - \gamma_0 = \gamma(\gamma_e' - \gamma_0') + \beta\gamma(\beta_e'\gamma_e' - \beta_0'\gamma_0').$$

Используя интеграл движения (6), можем написать:

$$\Delta\gamma_e = -\gamma\phi + \gamma\beta\,[\sqrt{(\gamma_0' - \phi)^2 - 1} - \sqrt{\gamma_0^2 - 1}\,]. \tag{14}$$

В приближении (5) можно разложить корень в (14) по степеням ϕ/γ_0^2-1, тогда с точностью до членов $\sim\phi^2$ имеем

$$\Delta\gamma_e \simeq -\frac{\beta_0}{\beta_0-\beta}\,\frac{\phi}{\gamma} - \frac{\beta\phi^2}{2\gamma_0^3\gamma^2(\beta_0-\beta)^3}. \tag{15}$$

Эту величину мы будем называть полевой добавкой к кинетической энергии электронов.

Важное значение имеет изменение кинетической энергии пучка как целого. Для этого вычислим работу поля ϕ над пучком:

$$P = \int \vec{j}\vec{E}\,dV = e\int_V n_e v_e E\,dV. \tag{16}$$

Эта величина дает изменение суммарной кинетической энергии электронов в объеме V в единицу времени, для вычисления ее положим, что пучок однороден в поперечной плоскости (r) и обозначим его радиус a; считаем, что $k_\perp a \ll 1$. Интеграл уравнения непрерывности равен

$$n_e(\beta_e - \beta) = n_0(\beta_0 - \beta). \tag{17}$$

Используя (4) и (17), для P получаем

$$P = -\frac{\pi a^2 n_0 mc^2 k}{\gamma}(\beta_0 - \beta)\int_0^z \frac{v_e}{\beta_e - \beta}\,\frac{d\phi}{d\psi}\,dz.$$

Заменяя здесь dz через $d\psi$: $d\psi = k dz\cdot\dfrac{\beta_e-\beta}{\beta_e}$, и переходя от β_e к β_e'

с помощью преобразования скорости

$$\beta_e = \frac{\beta+\beta_e'}{1+\beta\beta_e'},$$

окончательно пишем

$$P = \pm\, mc^2 n_0 \pi a^2 \gamma^3 (v_0 - v) \int\limits_{\phi_н}^{\phi} \frac{(\beta'_e + \beta)^2}{\beta_e'^2}\, d\phi. \qquad (18)$$

Здесь и далее верхний знак для встречной волны, с учетом (12). Если учесть, что $\beta'_e = \sqrt{(\gamma'_e - \phi)^2 - 1}/\gamma'_e \mp \phi$, то интеграл в (18) можно вычислить точно. Далее ограничимся достаточным в рамках условия (5) разложением по степеням $\phi/\gamma'_0 - 1$ аналогично тому, как это было сделано при получении формулы (15).

Результат таков ($\phi_н \ll \phi$):

$$\frac{P}{\pi a^2 mc^2 n_0} = \pm \frac{\beta_0 v_0}{\gamma(\beta_0 - \beta)}\phi \pm \frac{\beta v_0 \phi^2}{\gamma^2 \gamma_0^3 (\beta_0 - \beta)^3}. \qquad (19)$$

Как уже упоминалось, (18) представляет собой величину

$$P = \frac{d}{dt} \sum_V mc^2 \gamma_e ,$$

т.е. равна производной по t от полевой добавки. Сравнивая (15) и (19)*, видим, что линейный по ϕ член в (19) равен линейному члену $\Delta\gamma_e$, умноженному на v_0, как и должно быть, квадратичные члены (также с учетом умножения на v_0) отличаются в 2 раза, что является отражением факта усреднения квадратичного по ϕ члена по объему (длине) пучка.

Интерес представляет значение P, усредненное по периоду колебаний волны. Начнем с линейной стадии РДВ, когда $|\phi| \ll \gamma'_0 - 1$. При этом эволюция $\phi(\psi)$ определяется функцией /4/:

$$\phi = \phi_н \cos\psi + \frac{\phi_н S^2}{2}(\psi\cos\psi - \sin\psi),$$

$\phi_н$ — начальное значение поля ϕ.

Очевидно, при этом $\bar{\phi} = 0$ и изменение энергии равно

$$\frac{\bar{P}}{\pi a^2 n_0 mc^2} = \pm \frac{\beta v_0 \overline{\phi^2}}{\gamma^2 \gamma_0^3 (\beta_0 - \beta)^3}. \qquad (20)$$

---

*Учитывая, что $\frac{\partial \phi}{\partial z} < 0$ для встречной волны.

Теперь немедленно получаем результат:

Медленная попутная волна $(\beta < \beta_0)$.

$$\frac{\bar{P}}{\pi a^2 n_0 mc^2} = -\frac{\beta v_0 \overline{\phi^2}}{\gamma^2 \gamma_0^3 (\beta_0 - \beta)^3} < 0, \tag{21}$$

т.е. пучок уменьшает свою энергию на линейной стадии РДВ. Поскольку в линейном приближении $\phi \sim E$, результат (21) с учетом релятивизма близок к известному (напр., /7/) и отвечает концепции отрицательности энергии пучка с возбужденной волной.

Быстрая попутная волна $(\beta > \beta_0)$.

Теперь работа поля над пучком положительна

$$\frac{\bar{P}}{\pi a^2 n_0 mc^2} = \frac{\beta v_0 \overline{\phi^2}}{\gamma^2 \gamma_0^3 (\beta - \beta_0)^3} > 0; \tag{22}$$

пучок на линейной стадии увеличивает свою энергию, энергия пучка с волной положительна.

В обоих случаях попутных волн $\frac{\bar{P}}{\pi a^2} = +Wv_0$, где W — плотность энергии пучка с волной /7/.

Встречная волна $(\beta = -|\beta|)$.

Для встречной волны в линейном случае изменение энергии пучка отрицательно:

$$\frac{\bar{P}}{\pi a^2 n_0 mc^2} = -\frac{|\beta| v_0 \overline{\phi^2}}{\gamma^2 \gamma_0^3 (\beta_0 + |\beta|)^3} < 0. \tag{23}$$

При этом, как нетрудно показать, $W > 0$, а $\frac{\bar{P}}{\pi a^2} = -W \cdot v_0$.

Если обратиться теперь к стадии РДВ с сильными возбужденными полями (но в пределах условия (5)), когда нелинейные явления становятся заметными, то результаты изменяются.

Фундаментальную роль в этом играет первый член в (19) с учетом того обстоятельства, что в нелинейном режиме колебания поля волны (огибающая) становятся несимметричными /6/.

Эту несимметрию колебаний в квазистационарном нелинейном режиме можно определить аналитически. Во втором приближении асимптотического метода Крылова — Боголюбова форма волны имеет вид [6] (в нелинейном квазистационарном режиме, когда $|\phi| = a_{ст} = \mathrm{Const}$):

$$\phi = -a_{ст}\sin\psi - c_2\frac{a^2_{ст}}{2}\cos 2\psi + c_3\frac{a^3_{ст}}{32}\sin 3\psi - \frac{c_2}{2}a^2_{ст},$$

$$c_2 = \frac{3}{2}S^2\frac{1-\beta\beta_0}{\gamma\gamma_0(\beta-\beta_0)^2},\ c_3 = \frac{2S^2}{\gamma_0^2},\ \omega^2_{огиб} = \omega^2\left(\frac{3}{4}c_3 a_{ст} + \frac{\phi_н S^2}{2a^2_{ст}}\right) \ll \omega^2. \tag{24}$$

Несимметрия огибающей поля волны, таким образом, равна

$$\bar{\phi} = -\frac{c_2}{2}a^2_{ст}. \tag{25}$$

Далее

$$\overline{\phi^2} = \frac{a^2_{ст}}{2}\left(1 + \frac{3}{4}c_2^2 a^2_{ст}\right). \tag{26}$$

Теперь формулу (19) можно переписать так:

$$\frac{\bar{P}}{\pi a^2 n_0 mc^2} = \mp\frac{\beta_0 v_0 c_2 a^2_{ст}}{2\gamma(\beta_0-\beta)} \pm \frac{\beta v_0 a^2_{ст}}{2\gamma^2\gamma_0^3(\beta_0-\beta)^3}. \tag{27}$$

Для наиболее интересных случаев медленной и встречной волн первый член в (27) превышает по абсолютной величине второй член, т.е. на стадии квазистационарного режима эффект нелинейности (несимметрия огибающей) превышает вклад линейного эффекта в $\bar{P}$. При этом для попутных волн — медленной и быстрой — оба члена в (27) имеют разные знаки, т.е. по сравнению с (21) и (22) $\bar{P}$ меняет знак.

Это означает, что по мере роста поля и нелинейных эффектов пучок в медленной волне от стадии торможения переходит к стадии ускорения, в быстрой волне может проявиться обратный эффект. Поле, при котором происходит этот переход, можно найти из решения системы уравнений второго приближения асимптотического метода [6], на стадии роста поля, $|\phi| < a_{ст}$.

Таким образом, характер продольных попутных волн в электронном пучке с окружением, знак их энергии зависят от уровня возбужденного поля. Обычные утверждения: медленная волна — волна с отрицательной энергией, быстрая волна — волна с положительной энергией — справедливы лишь на линейной стадии, далеко от захвата ($|\phi| \ll \gamma_0' - 1$).

Особо обратим внимание на случай встречной волны, который интересен как раз тем, что он связан с получением больших полей[5]. Как нетрудно убедиться, в этом случае оба члена в (27) имеют одинаковые знаки (—), следовательно, нелинейность значительно, в данном случае на один-два порядка, усиливает эффект изменения энергии электронов пучка, который в случае встречной волны уменьшает кинетическую энергию на активном участке РДВ, т.е. в нарастающем по ходу волны поле.

4. О балансе энергии РДВ. Заключение

Интересно оценить максимальную мощность, передаваемую от пучка к полю (при $|\phi| = \phi_{макс} = a_{ст}$) для случая РДВ на встречной волне, когда электрическое поле волны может достигать очень больших значений.

Оценка следует из формулы (27)

$$\bar{P}_{макс} \simeq -\frac{a_{ст}^2}{4\gamma}\left[c_2 + \frac{1+\frac{3}{4}c_2^2 a_{ст}^2}{4\gamma\gamma_0^3}\right]\pi a^2 n_0 v_0 mc^2, \qquad (28)$$

или в другой форме,

$$\bar{P}_{макс} \simeq -\pi a^2 n_0 v_0 mc^2\left[1 + \frac{3\left(\frac{\lambda}{\pi a}\right)^2 \frac{J}{J_A}}{2\gamma_0}\right]; \qquad (29)$$

$J_A \simeq 17$ кА, J — ток пучка, в (28) и (29) положено $\beta_0 \simeq 1$, $|\beta| \simeq 1$. Для характерного набора параметров

$\gamma_0 = 5$, $\gamma > 10$, $n_0 \simeq 10^{13}$ см$^{-3}$ ($J \simeq 35$ кА), $2a = 1$ см,

$$|E_{макс}| = \frac{2\pi mc^2}{e\lambda}\gamma_0 \le 5\cdot 10^6 \frac{В}{см}$$

эти формулы дают

$$|\bar{P}_{макс}| \simeq 1000 \text{ мВт}. \qquad (30)$$

Приведем оценку для медленной волны при

$\gamma_0 = 3$, $\gamma \simeq 1$, $\beta = 0{,}1$, $\lambda = \lambda_0\beta = 25$ см.

$J = 2$ кА, $a = 1$ см на линейной стадии ($E < 65$ кВ/см)

$$|\bar{P}_{\text{макс}}| \simeq 1 \text{ МВт}. \qquad (31)$$

Эти результаты показывают, что электронный сильноточный пучок, несмотря на малое изменение релятивистского фактора (во всех случаях $\Delta\gamma_e/\gamma_0 \ll 1$), из-за большой плотности электронов передает полю при взаимодействии со встречной волной и на квазилинейной стадии — при взаимодействии с медленной волной — весьма большую мощность.

Роль электронного пучка в процессе РДВ можно подытожить следующим образом:

1) усиление начальной Е-волны за счет модуляции плотности (более чем на порядок),

2) изменение характера распределения поля в плоскости, перпендикулярной направлению распространения пучка и волны (в том числе образование глубокой кулоновской потенциальной ямы для положительных зарядов);

3) за счет эффективного обмена энергией пролетных электронов с волной аккумулированнная в РЭП большая кинетическая энергия электронов служит " резервуаром" для отбора энергии на возбуждение мощной Е-волны.

Эти результаты завершают, в основном, построение теории резонансного доплеровского взаимодействия и дают основания считать механизм РДВ эффективным средством получения больших электрических полей, перемещающихся в пространстве со скоростью, близкой к скорости света.

Важно при этом подчеркнуть, что РДВ, использующее сильноточные релятивистские электронные пучки и волноводные структуры с возбужденной квазимонохроматической Е-волной, имеет регулярный, управляемый характер, обеспечивающий весьма быстрый рост поля во времени ($T_{\text{огиб}}/2 \simeq 10 \div 100$ нс).

Литература

1. Sloan M., Drummond W. — Phys.Rev.Lett., 1973, v.31, p.1234.
2. Sprangle P. et al. — Phys.Rev.Lett., 1976, v.36, p.1180.
3. Nation J. — In: "The Generation of High Fields for Part.Accel." Proc. of Gas-ECFA-JNFN Workshop, Frascati 1984, CERN 85-07, 1985.
4. Бонч-Осмоловский А.Г., Доля С.Н., Решетникова К.А. — ЖТФ, 1983, т.53, вып.6, с.1055.

5. Бонч-Осмоловский А.Г. — Препринт ОИЯИ Р2-89-83, Дубна, 1989.
6. Бонч-Осмоловский А.Г., Решетникова К.А. — ЖТФ, 1986, т.56, вып. 9, с.1664.
7. Незлин М.В. — УФН, 1976, т.120, с.481.

Рукопись поступила 19 декабря 1990 года.